

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Známe-li kořeny kvadratické rovnice, můžeme zpětně napsat kvadratickou rovnici.

Například:

$$x_1=7; x_2=-2 \Rightarrow x_1-7=0 \wedge x_2+2=0 \Rightarrow (x-7) \cdot (x+2)=0 \Rightarrow x^2-5 \cdot x-14=0$$

nebo

$$x_1=-7; x_2=2 \Rightarrow x_1+7=0 \wedge x_2-2=0 \Rightarrow (x+7) \cdot (x-2)=0 \Rightarrow x^2+5 \cdot x-14=0$$

nebo

$$x_1=-3; x_2=-12 \Rightarrow x_1+3=0 \wedge x_2+12=0 \Rightarrow (x+3) \cdot (x+12)=0 \Rightarrow x^2+15 \cdot x+36=0$$

nebo

$$x_1=\frac{7}{2}; x_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x_1-\frac{7}{2}=0 \wedge x_2+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow (x-\frac{7}{2}) \cdot (x+\frac{1}{2})=0 \Rightarrow x^2-3 \cdot x-\frac{7}{4}=0 \Rightarrow 4 \cdot x^2-12 \cdot x-7=0$$

Zpětně se zdá, že mezi koeficienty kvadratické rovnice a kořeny existuje nějaký vztah. Minimálně se zdá, že součin kořenů je stejný jako absolutní člen kvadratické rovnice.

Takže to zkusme zobecnit:

Každá kvadratická rovnice, má-li řešení v oboru reálných čísel, se dá napsat $(x-x_1) \cdot (x-x_2)=0$, kde x_1, x_2 jsou její kořeny.

A každá obecná kvadratická rovnice $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ se dá vydělením a (a je nenulové, proč asi?)

upravit na tvar $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$. $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ jsou čísla, reálná čísla, takže místo zlomku můžeme napsat

jinou konstantu. Obvykle se píše p a q a rovnice pak má tvar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Rovnici $(x-x_1) \cdot (x-x_2)=0$ si teď upravme: $x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

Konečně: $x^2 + x \cdot (-x_1 - x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$ porovnejme s upravenou obecnou rovnicí $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Závěr: Je vidět, že $p = -x_1 - x_2$ nebo $x_1 + x_2 = -p$ a $q = x_1 \cdot x_2$.

A jak se to dá využít?

Příklad 1:

Určete rovnici s kořeny:

a) $x_1=5; x_2=-4$

b) $x_1=\frac{2}{3}; x_2=\frac{3}{4}$

c) $x_1=-2; x_2=\frac{-2}{5}$

Řešení:

a) $p = -5 + 4 = -1; q = 5 \cdot (-4) = -20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

b) $p = -\frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{8+9}{12} = -\frac{17}{12}; q = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{17}{12} \cdot x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 12 \cdot x^2 - 17 \cdot x + 6 = 0$

c) $p = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}; q = (-2) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} \Rightarrow x^2 + \frac{12}{5} \cdot x + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow 5 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 4 = 0$

Příklad 2:

Rozložte na součin:

a) $x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0$

b) $x^2 - 4 \cdot x - 32 = 0$

c) $x^2 + 10 \cdot x + 21 = 0$

Řešení:

Hledáme dvě čísla, pro která platí:

a) $-p = -(-7) = 7 = x_1 + x_2 \wedge q = 10 = x_1 \cdot x_2$

b) $-p = -(-4) = 4 = x_1 + x_2 \wedge q = -32 = x_1 \cdot x_2$

c) $-p = -10 = x_1 + x_2 \wedge q = 21 = x_1 \cdot x_2$

Stačí znát násobilku a počítat čísla, abychom výsledek v těchto jednoduchých příkladech odhadli:

a) $x_1=5; x_2=2 \Rightarrow (x-5) \cdot (x-2)=0$

b) $x_1=8; x_2=-4 \Rightarrow (x-8) \cdot (x+4)=0$

$$c) \quad x_1 = -7; x_2 = -3 \Rightarrow (x+7) \cdot (x+3) = 0$$

Příklad 3:

Rozložte na součin:

$$a) \quad 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1 = 0$$

$$b) \quad 12 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 3 = 0$$

$$c) \quad 16 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 1 = 0$$

Řešení:

Tady už řešení tak dobře vidět, musíme použít vzorec pro určení kořenů.

$$a) \quad D = 9 + 4 \cdot 4 = 25; x_1 = \frac{3+5}{2 \cdot 4} = 1; x_2 = \frac{3-5}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$b) \quad D = 169 - 144 = 25; x_1 = \frac{13+5}{24} = \frac{3}{4}; x_2 = \frac{13-5}{24} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$c) \quad D = 36 + 4 \cdot 16 = 36 + 64 = 100; x_1 = \frac{-6+10}{32} = \frac{1}{8}; x_2 = \frac{-6-10}{32} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$