Iracionální rovnice a soustava kvadratické a lineární rovnice

Teorie

- pravidla řešení iracionálních rovnic s jednou nebo více odmocninami; význam zkoušky pro určení řešení
- řešení soustavy rovnic a zápis řešení; význam zkoušky

Praxe

Příklad 1

Řešte:

a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4\cdot x+13}=\sqrt{3\cdot x+12}$

b) $\sqrt{x+2}-\sqrt{2\cdot x-3}=\sqrt{4\cdot x-7}$

c) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$

d) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2\cdot x-7}=2\cdot\sqrt{x}$

e) $\sqrt{x\cdot\sqrt{x}-x}+\sqrt{x}=x$

Příklad 2

Zvětšíme-li neznámé číslo o 7 a utvoříme-li druhou odmocninu takto zvětšeného čísla, obdržíme číslo, které je o 5 menší než původní neznámé číslo. Určete je.

Příklad 3

Rozdíl dvou čísel je 48, rozdíl jejich aritmetického a geometrického průměru je 18. Která čísla to jsou?

(Aritmetický průměr: $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (čti: součet n čísel děleno jejich počtem), geometrický průměr: $\hat{a}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$, čti: $n$tá odmocnina součinu n čísel)

Příklad 4

Jedna strana obdélníku je o 3 kratší než strana druhá a jeho úhlopříčka o $\sqrt{2}$ kratší než úhlopříčka čtverce sestrojeného nad delší stranou. Určete rozměry obdélníku.

Příklad 5

Řešte soustavy rovnic:

a) $\begin{array}{c} x^2+y^2=25 \\ 4\cdot x+3\cdot z=25 \end{array}$ b) $\begin{array}{c} x^2+y^2=1 \\ x-y=-\sqrt{2} \end{array}$ c) $\begin{array}{c} x^2+y^2=9 \\ 3\cdot y=x-3 \end{array}$

Příklad 6

Aritmetický průměr dvou čísel je 17 a jejich geometrický průměr je 15. Určete tato dvě čísla.

Vlastnosti funkcí, definiční obory

Teorie

- definice funkce; definiční obor a obor hodnot
- monotónnost funkce (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající)
- další vlastnosti funkce (extrém – maximum, minimum; sudost/lichost)
- inverzní funkce (prostá funkce)

Praxe

Příklad 1

Určete definiční obor funkce

a) $y=\frac{2\cdot x+7}{x-1}$ b) $y=\sqrt{1-2\cdot x}$ c) $y=\frac{1}{\sqrt{3\cdot x+2}}$ d) $y=\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$

Příklad 2

Dokažte pomocí definice i graficky, že funkce

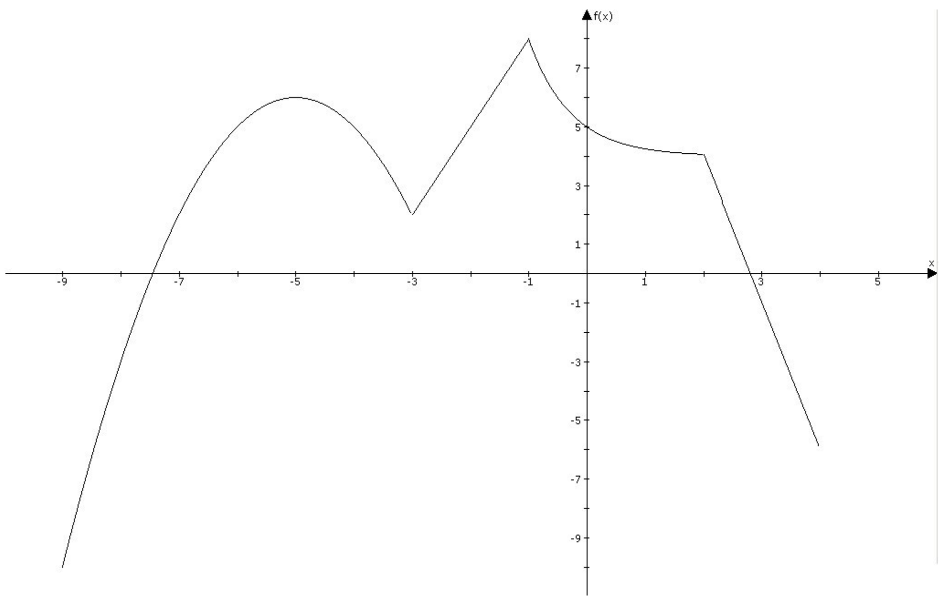
a) $y=-4\cdot x+1$ je klesající

b) $y=3\cdot x-5$ je rostoucí

c)* $y=x^2-9$ je sudá

Příklad 3

Určete definiční obor grafu, obor hodnot, průběh funkce (monotónnost), minimum a maximum, určete, z čeho se skládá funkce na obrázku



Příklad 4

Nakreslete graf funkce

a) $f(x)=x\cdot\left(\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x+1|}{x+1}\right)$ b) $f(x)=x^2-5\cdot|x|+6$ c) $f(x)=|x^2-5\cdot x+6|$

Výsledky

5. otázka

1. a) nemá řešení; b) {2}; c) {2,4;4}; d) {1;4}

2. {9}

3. [49;1]

4.

5. b) $\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\}$; c) $\left\{\left[\frac{-12}{5};-\frac{9}{5}\right];[3;0]\right\}$

6. {[9;25]; [25;9]}

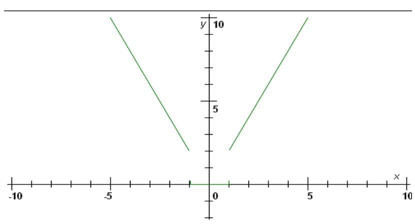
6. otázka

1. a) $\mathbb{R}\setminus 1$; b) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ c) $\left(\frac{-2}{3};\infty\right)$ d) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$

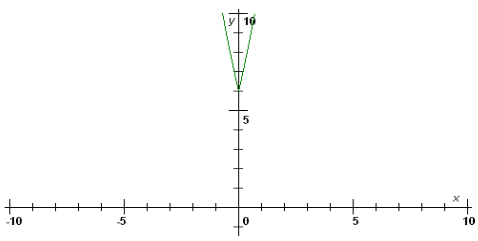
2. $\begin{array}{c} x_1<x_2 \\ -4\cdot x_1>-4\cdot x_2 \\ -4\cdot x_1+1>-4\cdot x_2+1 \end{array}\qquad \begin{array}{c} x_1<x_2 \\ 3\cdot x_1<3\cdot x_2 \\ 3\cdot x_1-5<3\cdot x_2-5 \end{array}\qquad \begin{array}{c} x_1;-x_1 \\ y_1=x_1{}^2-9;\, y_1=-x_1{}^2-9 \\ y_1=y_2 \end{array}$

3. $\begin{array}{l} D_f=\langle -9;4\rangle \\ H_f=\langle -10;8\rangle \\ \langle -9;-3\rangle\ f_1(x)=-x^2-10\cdot x-19 \\ \langle -3;-1\rangle\ f_2(x)=2\cdot x+10 \\ \langle -1;2\rangle\ f_3(x)=2\cdot x^2-x+5 \\ \langle 2;4\rangle\ f_4(x)=-5\cdot x+14 \end{array}$

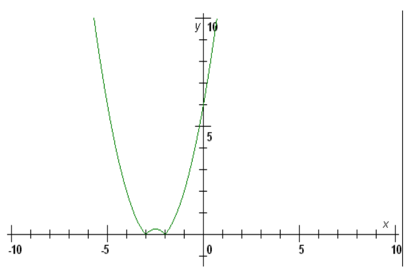
4. a) $\begin{array}{l} (-\infty;-1)\ f_1(x)=-2\cdot x \\ (-1;1)\ f_2(x)=0 \\ (1;\infty)\ f_3(x)=2\cdot x \end{array}$



b) $\begin{array}{l} (-\infty;0\rangle\ f_1(x)=x^2+5\cdot x+6 \\ \langle 0;\infty)\ f_2(x)=x^2-5\cdot x+6 \end{array}$



c) $\begin{array}{l} (-\infty;2\rangle\ f_1(x)=x^2-5\cdot x+6 \\ \langle 2;3\rangle\ f_2(x)=-x^2+5\cdot x-6 \\ \langle 3;\infty)\ f_3(x)=x^2-5\cdot x+6 \end{array}$



Výsledky

5. otázka

1. a) nemá řešení; b) {2}; c) {2,4;4}; d) {1;4}

2. {9}

3. [49;1]

4.

5. b) $\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right\}$; c) $\left\{\left[\frac{-12}{5};-\frac{9}{5}\right];[3;0]\right\}$

6. {[9;25]; [25;9]}

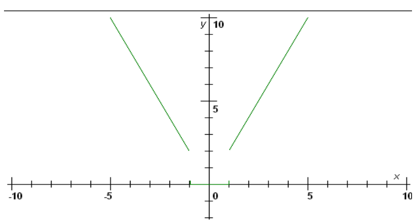
6. otázka

1. a) $\mathbb{R}\setminus 1$; b) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right\rangle$ c) $\left(\frac{-2}{3};\infty\right)$ d) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$

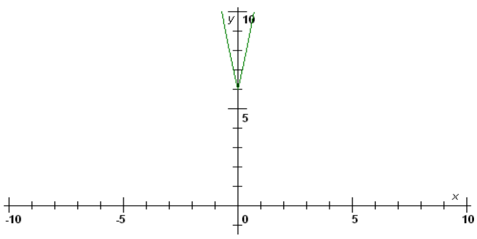
2. $$\begin{array}{ccc} x_1<x_2 & x_1<x_2 & x_1;-x_1 \\ -4\cdot x_1>-4\cdot x_2 & 3\cdot x_1<3\cdot x_2 & y_1=x_1{}^2-9;\ y_1=-x_1{}^2-9 \\ -4\cdot x_1+1>-4\cdot x_2+1 & 3\cdot x_1-5<3\cdot x_2-5 & y_1=y_2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} D_f=\langle -9;4\rangle \\ H_f=\langle -10;8\rangle \\ \langle -9;-3\rangle\ f_1(x)=-x^2-10\cdot x-19 \\ \langle -3;-1\rangle\ f_2(x)=2\cdot x+10 \\ \langle -1;2\rangle\ f_3(x)=2\cdot x^2-x+5 \\ \langle 2;4\rangle\ f_4(x)=-5\cdot x+14 \end{array}$$

4. a) $$\begin{array}{l} (-\infty;-1)\ f_1(x)=-2\cdot x \\ (-1;1)\ f_2(x)=0 \\ (1;\infty)\ f_3(x)=2\cdot x \end{array}$$



b) $$\begin{array}{l} (-\infty;0\rangle\ f_1(x)=x^2+5\cdot x+6 \\ \langle 0;\infty)\ f_2(x)=x^2-5\cdot x+6 \end{array}$$



c) $$\begin{array}{l} (-\infty;2\rangle\ f_1(x)=x^2-5\cdot x+6 \\ \langle 2;3\rangle\ f_2(x)=-x^2+5\cdot x-6 \\ \langle 3;\infty)\ f_3(x)=x^2-5\cdot x+6 \end{array}$$