Algebraické výrazy, mocniny a odmocniny

Teorie

- určení platnosti algebraického výrazu (např. zlomek, odmocnina)
- určení hodnoty výrazu
- úprava výrazu s použitím vztahů pro $a^2-b^2; a^3-b^3; a^3+b^3; (a+b)^2; (a-b)^2; (a+b)^3; (a-b)^3$
- pravidla pro počítání mocnin s přirozeným exponentem (včetně důkazu;)
- pravidla pro počítání mocnin s celým exponentem (včetně důkazu;)
- pravidla pro počítání mocnin s racionálním exponentem (včetně důkazu;)

Praxe

Příklad 1:

Pro libovolné reálné nenulové číslo a vypočtěte:

$$a^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Příklad 2:

Vypočtěte:

$$\frac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{2}}\div\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{4}}}$$

Příklad 3:

Je dán zlomek $\dfrac{x^3-2\cdot x^2-x+2}{x^3+2\cdot x^2-x-2}$. Pro která reálná čísla x má zlomek a) smysl, b) hodnotu rovnou 0, nabývá kladných hodnot.

Příklad 4:

Zjednodušte výrazy:

$$\left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-\frac{2}{3}}}\right)\div\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}}-\frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{-2}\cdot\left(b-\frac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(a\cdot b-\frac{1}{a\cdot b}\right)^{2}$$

$$\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt[3]{4\cdot a^2 b^4}\cdot\sqrt[4]{8\cdot a^3 b^7}\cdot\sqrt[12]{2\cdot a^3 b^9}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{b}\div\left[\left(\frac{a\cdot\sqrt[3]{b}}{(1+a^2)^{-1}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{a\cdot\sqrt[8]{b^3}}\right)^{2}\right]$$

Lineární rovnice a nerovnice a jejich soustavy

Teorie

- ekvivalentní úpravy rovnic/nerovnic
- význam zkoušky
- řešení soustavy rovnic a zápis řešení
- řešení soustavy nerovnic, včetně součinu/podílu výrazů; nulové body, zápis řešení

Praxe

Příklad 1:

Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y, z:

a) $\begin{aligned} x+2\cdot y-z&=2\\ 2\cdot x+y+z&=7\\ x+y+z&=6 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x+2\cdot y+z&=1\\ 3\cdot x-z&=7\\ 7\cdot x-4\cdot y-5\cdot z&=16 \end{aligned}$

Příklad 2:

Řešte rovnici s reálným parametrem *m* pro neznámou x

a) $(x+2)\cdot(m-1)=3\cdot m\cdot x$ b) $\frac{(c+1)^2}{4}=c\cdot(1-x+c\cdot x)$ c) $\frac{x}{5}-1=\frac{1-3\cdot x}{b+2}$

Příklad 3:

Určete všechny hodnoty koeficientu *a*, pro který má rovnice

$$\frac{a\cdot(x+2)-3\cdot(x-1)}{x+1}=1$$

a) kladné řešení b) záporné řešení c) žádné řešení

Příklad 4:

V množině reálných čísel řešte nerovnice:

a) $\frac{1-2\cdot x}{x-1}>-3$ b) $x^2-2\cdot x\leq 0$ c) $\frac{(5-x)\cdot(x-1)\cdot(3\cdot x-2)}{(2-2\cdot x)\cdot(4\cdot x+1)}\geq 0$

Příklad 5:

V množině celých čísel řešte nerovnice

a) $\frac{x^2-3\cdot x+2}{x-3}\geq 0$ b) $0<\frac{5-x}{x-3}<1$

Příklad 6:

Řešte soustavy nerovnic v dané množině

a) $-1<\frac{x+2}{3-2\cdot x}<3\,;\, v\,\mathbb{R}$ b) $\begin{aligned} 2\cdot x+1<x+2<-x+3,\\ 3\cdot x-1\geq 2\cdot x-1>x-5,\, v\,\mathbb{Z} \end{aligned}$

Výsledky

1. otázka

1. $\{1\}$

2. $\left\{\dfrac{1}{5^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}\right\}$

3. a) smysl má pro $x \neq 1\,;\, x \neq -1\,;\, x \neq -2$; b) kladné je pro $(-\infty\,;-2)\cup(2\,;\infty)$

4. $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; $\sqrt[6]{2^9\cdot a^{13}\cdot b^{26}}=2\cdot a^2\cdot b^4\sqrt[6]{2^3\cdot a\cdot b^2}$; $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}-9}{10}$; $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{b}\cdot\dfrac{a^2\cdot\sqrt[4]{b^3}}{2+\sqrt{2}\,a^7\cdot\sqrt[4]{b^5}\cdot\sqrt{(1+a^2)^3}}$

2. otázka

1. a) $\{[1\,;2\,;3]\}$; b) nemá řešení

2. a) pro $m=-\dfrac{1}{2}$ nemá řešení; jinak $x=\dfrac{2\cdot m-2}{2\cdot m+1}$

b) pro $c=0$ nemá řešení; pro $c=1$ je x libovolné reálné číslo; jinak $x=\dfrac{(c+1)^2-4\cdot c}{4\cdot c\cdot(c-1)}$

c) pro $b=-17$ nemá řešení; jinak $x=\dfrac{15+5\cdot b}{17+b}$

3. a) $(-\infty;-6)\cup(-6\,;-1)\cup(4\,;\infty)$; b) $(-1\,;4)$; c) pro $a=4\vee a=-6$ nemá řešení

4. a) $(-\infty;1)\cup(2\,;\infty)$; b) $\langle 0\,;2\rangle$; c) $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{3}\right\rangle\cup\langle 5\,;\infty)$

5. a) $\{1\,;2\,;3\,;...\}$; b) $\{\}$

6. a) $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$; b) $\{0\}$

Výsledky

1. otázka

1. $\{1\}$

2. $\left\{\dfrac{1}{5^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}\right\}$

3. a) smysl má pro $x\neq 1\,;\,x\neq -1\,;\,x\neq -2$; b) kladné je pro $(-\infty\,;-2)\cup(2\,;\infty)$

4. $\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; $\sqrt[6]{2^9\cdot a^{13}\cdot b^{26}}=2\cdot a^2\cdot b^4\sqrt[6]{2^3\cdot a\cdot b^2}$; $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}-9}{10}$; $\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{b}\cdot\dfrac{a^2\cdot\sqrt[4]{b^3}}{2+\sqrt{2}\,a^7\cdot\sqrt[4]{b^5}\cdot\sqrt{(1+a^2)^3}}$

2. otázka

1. a) $\{[1\,;2\,;3]\}$; b) nemá řešení

2. a) pro $m=-\dfrac{1}{2}$ nemá řešení; jinak $x=\dfrac{2\cdot m-2}{2\cdot m+1}$

b) pro $c=0$ nemá řešení; pro $c=1$ je x libovolné reálné číslo; jinak $x=\dfrac{(c+1)^2-4\cdot c}{4\cdot c\cdot(c-1)}$

c) pro $b=-17$ nemá řešení; jinak $x=\dfrac{15+5\cdot b}{17+b}$

3. a) $(-\infty;-6)\cup(-6\,;-1)\cup(4\,;\infty)$; b) $(-1\,;4)$; c) pro $a=4\vee a=-6$ nemá řešení

4. a) $(-\infty;1)\cup(2\,;\infty)$; b) $\langle 0\,;2\rangle$; c) $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{3}\right\rangle\cup\langle 5\,;\infty)$

5. a) $\{1\,;2\,;3\,;...\}$; b) $\{\}$

6. a) $\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$; b) $\{0\}$