Vlastnosti funkcí – procvičování

Funkce, funkční hodnoty

Podle grafu

Funkci poznáme podle toho, že se nikde nestane, že by jednomu x odpovídaly dvě (a více) hodnoty y. Graf funkce je množina bodů, které mají x-ové souřadnice, y-ové souřadnice. Tyto souřadnice odpovídají dvojicím čísel, které souhlasí s výpočtem pomocí předpisu funkce. Dosadím-li za x, dostanu funkční hodnotu f(x)=y. Dosadím-li za y, dostanu, pro které x vychází taková funkční hodnota.

Podle předpisu

Mám-li na straně předpisu výraz, který nenabývá jednoznačného výsledku, pak se nemůže jednat o funkci. x je nezávisle proměnná, dosazuji hodnoty z definičního oboru, y je závisle proměnná, její výsledek závisí na předpisu a dosazeném x. Množinu všech y (funkčních hodnot) nazýváme oborem hodnot.

Definiční obory a obory hodnot

Podle grafu

Definiční obor „přečteme“ na ose *x* (promítnutím bodů grafu na osu *x*) a obor hodnot na ose *y* (promítnutím bodů grafu na osu *y*).

Podle předpisu

Definiční obor je vlastně množina x, pro které má předpis smysl. Obor hodnot dost často (neznáme-li vlastní funkci a její vlastnosti) nejsme schopni určit.

Monotónnost funkce, maxima a minima, omezenost

Podle grafu

Funkce rostoucí v celém definičním oboru roste, tedy pro „zvětšující se“ x se zvyšuje i hodnota y (funkční hodnota). Pro neklesající funkci platí, že pro některá x vychází funkční hodnota stejná, jinak je ale rostoucí.
Funkce klesající v celém definičním oboru klesá, tedy pro „zvětšující se“ x se snižuje hodnota y (funkční hodnota). Pro nerostoucí funkci platí, že pro některá x vychází funkční hodnota stejná, jinak je ale klesající.
Maxima, minima a omezenost funkce poznáváme podle osy y a funkčních hodnot funkce – má-li funkce maximum, je omezená shora, má-li minimum, je omezená zdola. A obráceně – je-li nějak omezená, pak má i maximum nebo minimum.

Podle předpisu

Znám-li vlastnosti funkce podle předpisu, mohu určit její maxima a minima (má-li je). Obecně zatím žádné „nástroje“ ke zjištění zatím neznáme. Můžeme se pokusit na konkrétním předpisu zjistit pomocí rovnic/nerovnic a jejich úprav.

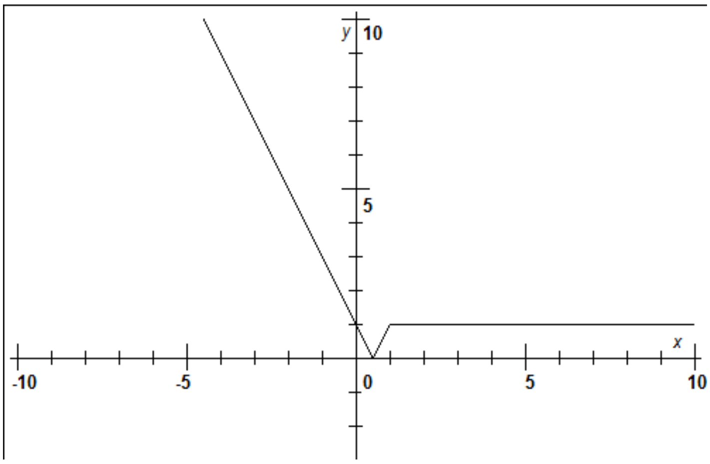
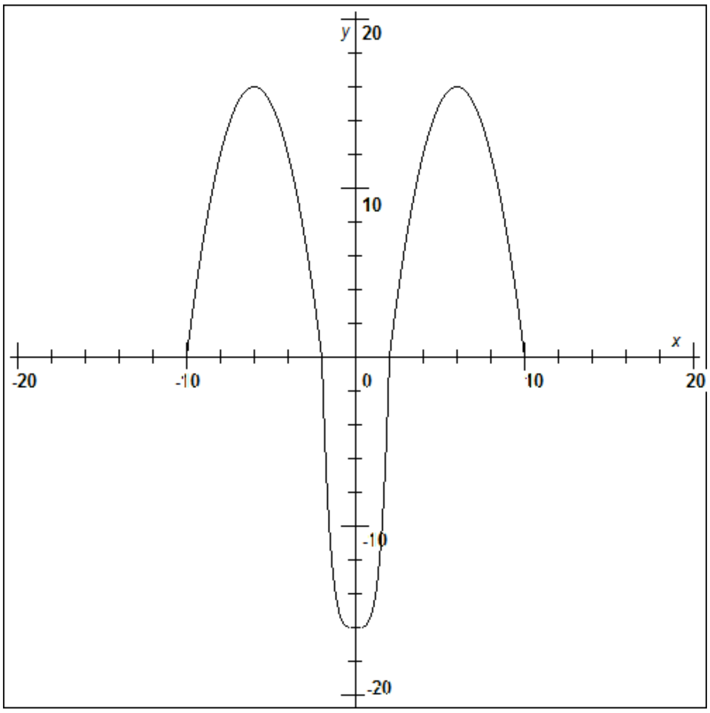
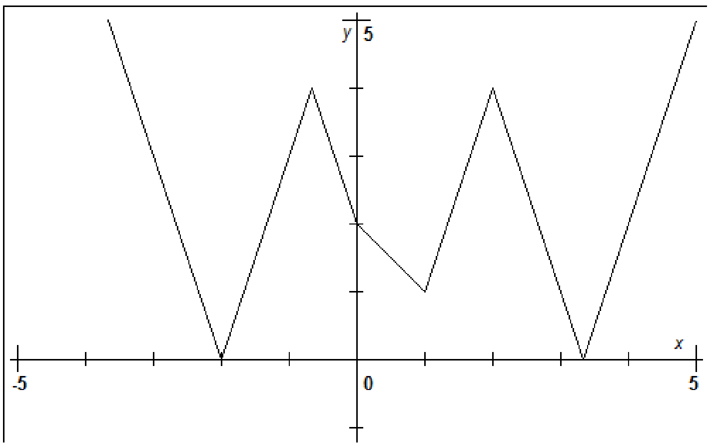
Sudost, lichost

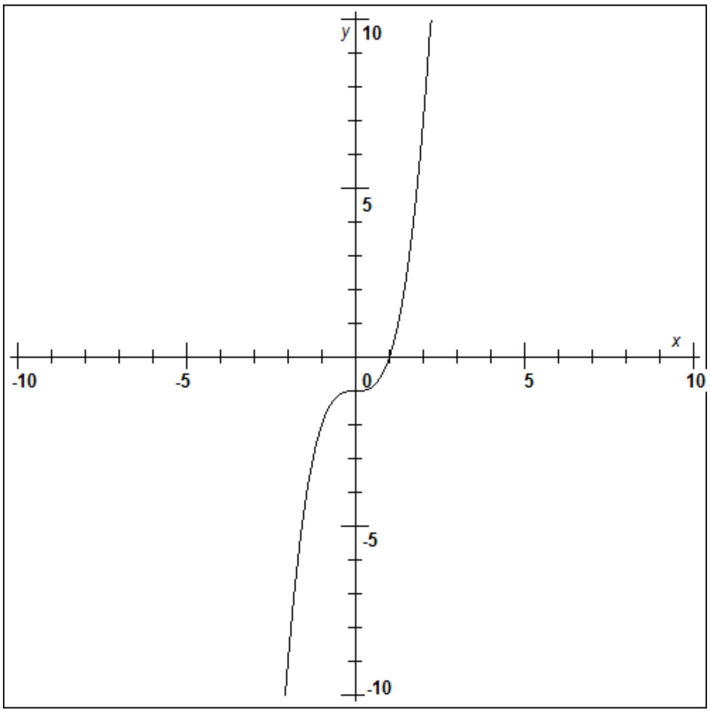
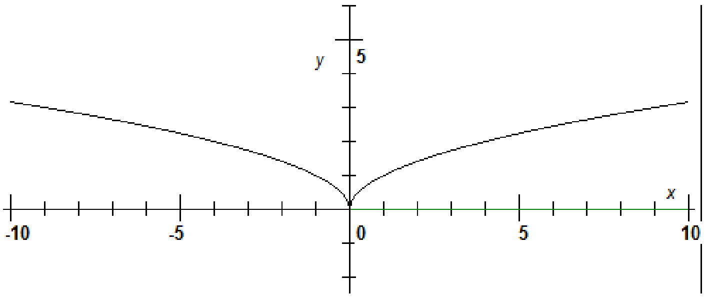
Podle grafu

Stačí rozpoznat, zda je graf souměrný podle osy y (funkce je sudá) nebo podle počátku soustavy souřadnic (funkce je lichá).

Podle předpisu

Obecně zatím žádné „nástroje“ ke zjištění zatím neznáme. Můžeme se pokusit na konkrétním předpisu zjistit pomocí rovnic/nerovnic a jejich úprav.

	$D_f=\mathbb{R}$ $H_f=\langle 0;\infty)$ minimum: $Min[0{,}5;0]$ => omezená zdola klesající: $(-\infty;0{,}5)$ rostoucí: $\langle 0{,}5;1\rangle$ konstantní: $\langle 1;\infty)$ průsečíky s osami: $X[0{,}5;0];Y[0;1]$ není sudá ani lichá 1 úsečka, 2 polopřímky => složená z lineárních funkcí $f_1(x): y=-2\cdot x+1; x\in(-\infty;0{,}5\rangle$ $f_2(x): y=2\cdot x-1; x\in\langle 0{,}5;1\rangle$ $f_3(x): y=1; x\in\langle 1;\infty)$
	$D_f=\langle -10;10\rangle$ $H_f=\langle -16;16\rangle$ minimum: $[0;-16]$ => omezená zdola maximum: $[-6;16];[6;16]$ => omezená shora průsečíky: $Y[0;-16]; X_1[-10;0]; X_2[-2;0];$ $X_3[2;0]; X_4[10;0]$ klesající: $\langle -6;0\rangle\cup\langle 6;10\rangle$ rostoucí: $\langle -10;-6\rangle\cup\langle 0;6\rangle$ funkce je sudá - „souměrný“ definiční obor a pro $\lvert x\rvert$ stejné funkční hodnoty určit předpis těžší – nevíme, o jaké funkce jde
	$D_f=\mathbb{R}$ $H_f=\langle 0;\infty)$ minimum: $[-2;0];[2;0]$ => omezená zdola maximum nemá, jen dvě lokální maxima: $[0{,}5;4];[4;4]$ lokální minimum: $[1;1]$ průsečíky: $X_1[-2;0]; X_2[\frac{1}{3};0]; Y[0;2]$ klesající: $(-\infty;-2\rangle\cup\langle -0{,}5;1\rangle\cup\left\langle 2;\frac{1}{3}\right\rangle$ rostoucí: $\left\langle -2;\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 1;2\rangle\cup\left\langle \frac{1}{3};\infty\right)$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$D_f = \mathbb{R}$
$H_f = \mathbb{R}$
nemá maximum ani minimum => není omezená
průsečíky: $Y[0;-1];X[1;0]$
není souměrná
určíme-li z grafu několik bodů:
$[0;-1];[-1;2];[1;0];[-2;7];[2;7]$
a známe-li mocniny, odhadneme předpis
$y=x^3-1$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$D_f = \mathbb{R}$
$H_f = \langle 0;\infty)$
minimum: $[0;0]$ => omezená zdola
minimum je zároveň průsečíkem s osami
klesající: $(-\infty;0\rangle$
rostoucí: $\langle 0;\infty)$
je sudá – souměrný definiční obor; funkční hodnoty stejné pro $|x|$
některé dvojice:
$[0;0];[-1;1];[1;1];[-4;2];[4;2];[-9;3];[9;3]$
vedou k domněnce, že $y=\sqrt{x}$, jenže pro záporná x není druhá odmocnina definována => $y=\sqrt{|x|}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x): y=\frac{x^4-16}{x^2-4}$</td>
<td>$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$; je to „jako“ kvadratická funkce $y=x^2+4$, jen pro $x=-2 \wedge x=2$ není definována
$H_f = \langle 4;\infty)$
minimum: $[0;4]$ => omezená zdola
mimimum je zároveň jediný průsečík s osou y
klesající: $(-\infty;0\rangle$
rostoucí: $\langle 0;\infty)$
sudá</td>
</tr>
<tr>
<td>$g(x): y=|2\cdot|x|-5|$</td>
<td>$D_f = \mathbb{R}$
obor hodnot? pro jakákoliv x vyjde kladné; nejmenší hodnota jakéhokoliv výrazu v absolutní hodnotě je 0, na druhou stranu omezená není $H_f = \langle 0;\infty)$
minimum je pro y = 0, x spočítáme z rovnice $0|2\cdot|x|-5|$, $x_1=-\frac{5}{2};x_2=\frac{5}{2}$
průsečíky: $X_1\left[\frac{5}{2};0\right];X_2\left[-\frac{5}{2};0\right]$</td>
</tr>
</table>

	funkce bude složená z úseků lineární funkce, její průběh se mění vždy tam, kde je výraz v absolutní hodnotě nulový – pro $x=-\frac{5}{2};0;\frac{5}{2}$ pro $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right\rangle$ je $x<0\Rightarrow \lvert x\rvert=-x$ a $2\cdot(-x)-5>0 \lvert 2\cdot\lvert x\rvert-5\rvert=-2\cdot x-5$ funkce je klesající pro $\left\langle -\frac{5}{2};0\right\rangle$ je $x<0\Rightarrow \lvert x\rvert=-x$ a $2\cdot(-x)-5<0 \lvert 2\cdot\lvert x\rvert-5\rvert=2\cdot x+5$ funkce je rostoucí pro $\left\langle 0;\frac{5}{2}\right\rangle$ je $x>0\Rightarrow \lvert x\rvert=x$ a $2\cdot x-5<0 \lvert 2\cdot\lvert x\rvert-5\rvert=-2\cdot x+5$ funkce je klesající pro $\left\langle \frac{5}{2};\infty\right\rangle$ je $x>0\Rightarrow \lvert x\rvert=x$ a $2\cdot x-5>0 \lvert 2\cdot\lvert x\rvert-5\rvert=2\cdot x-5$ funkce je rostoucí funkce je sudá: $f(x)=f(-x)$
$h(x): y=(x-5)^2$	kvadratická funkce s vrcholem posunutým o 5 doprava
$i(x): y=\frac{4-x}{4+x}$	$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ průsečíky: $x=0\Rightarrow y=1$; $y=0\Rightarrow x=4$ neznáme-li funkce s neznámou ve jmenovateli podrobněji, víc nezjistíme, maximálně můžeme zkusit načrtnout graf
$j(x): y=-\frac{4}{x}$	$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ průsečíky: pro $x=0$ nemá smysl => nemá průsečík s osou y pro $y=0$ na pravé straně $-\{\frac{4}{x}\}$ => nemá průsečík s osou x předpis připomíná nepřímou úměrnost (kde platí, že s rostoucím x klesá y => klesající funkce) vynásobenou -1 (takže by mohla být rostoucí) odhad nestačí – pro čísla $x<0$ je výraz kladný; pro čísla $x>0$ je výraz záporný, proto v celém definičním oboru funkce nemůže být rostoucí pro záporná čísla zvlášť a pro kladná čísla zvlášť to ale platí pro $\lvert x\rvert$ platí, že číselně jsou funkční hodnoty stejné až na znaménko => funkce je lichá $f(-x)=-f(x)$