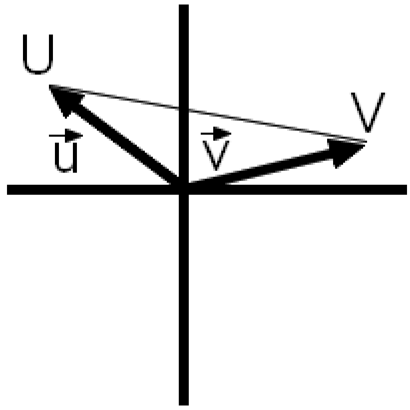
Odchylka vektorů



Předpoklady: velikost vektoru, vzdálenost bodů, cosinová věta, význam souřadnic vektoru

Mějme dva vektory $\vec{u}=(u_1;u_2)$ a $\vec{v}=(v_1;v_2)$. Pak jejich umístěním do počátku soustavy souřadnic dostaneme trojúhelník OUV, kde $U[u_1;u_2]$ je koncový bod vektoru $\vec{u}$ a $V[v_1;v_2]$ je koncový bod vektoru $\vec{v}$. Vzdálenost

$|UV|=\sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}$ je jednou stranou trojúhelníku, když zbývající dvě strany $|\vec{u}|$ a $|\vec{v}|$ svírají úhel φ.

Pak z cosinovy věty platí rovnost $|UV|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$.

Dosazením dostaneme $(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2=u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$,

po úpravě $v_1^2-2\cdot v_1\cdot u_1+u_1^2+v_2^2-2\cdot v_2\cdot u_2+u_2^2=u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$,

po zjednodušení $-2\cdot v_1\cdot u_1-2\cdot v_2\cdot u_2=-2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\varphi$.

Jednoduchou úpravou dostaneme vztah: $\cos\varphi=\dfrac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Poznámky:

1) terminologická – součinu v čitateli říkáme skalární součin
2) velikostní – odchylka vektorů se pohybuje v rozpětí 0°–180°, obě krajní hodnoty mají svůj smysl. Funkce cos má pro úhly 0°–90° kladné hodnoty a pro úhly 90°-180° záporné hodnoty.

Příklady

1) Určete odchylku vektorů $\vec{u}=(1;3)$ a $\vec{v}=(2;-3)$.
2) Určete odchylku vektorů $\vec{u}=(2;-4)$ a vektoru, jehož umístěním je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, kde $A[-4;2]$ a $B[-3;5]$.
3) Určete úhel γ v trojúhelníku ABC, kde $A[-5;4]$, $B[3;2]$ a $C[-6;-2]$.
4) Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u}=(9;-2)$ a $\vec{v}=(-3;-5)$
5) Vypočítejte skalární součin vektorů $|\vec{u}|=3$ a $|\vec{v}|=2$, které svírají úhel 60°.
6) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ se sebou samým.
7) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ s opačným vektorem $-\vec{u}$.
8) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ s vektorem, který bude mít prohozené souřadnice.
9) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ s vektorem, který bude mít prohozené souřadnice a u jedné změníme znamínko.
10) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ s kladným lineárním násobkem tohoto vektoru.
11) Určete odchylku vektoru $\vec{u}$ se záporným lineárním násobkem tohoto vektoru.

Výsledky

Výsledky doporučuji, zvláště 8-11 skutečně spočítat. Ten, kdo si ověří odsazením do vzorce, pochopí jeho význam.

Ad 1) 127°52'

Ad 2) 135°

Ad 3) 41°12'

Ad 4) -8

Ad 5) 3

Ad 6) 0°

Ad 7) -180°

Ad 8) $\cos\varphi = \frac{2 \cdot u_1 \cdot u_2}{u_1^2 + u_2^2}$

Ad 9) 90°

Ad 10) 0°

Ad 11) 180°